2015학년도 중등학교교사 임용후보자 선정경쟁시험

수 학

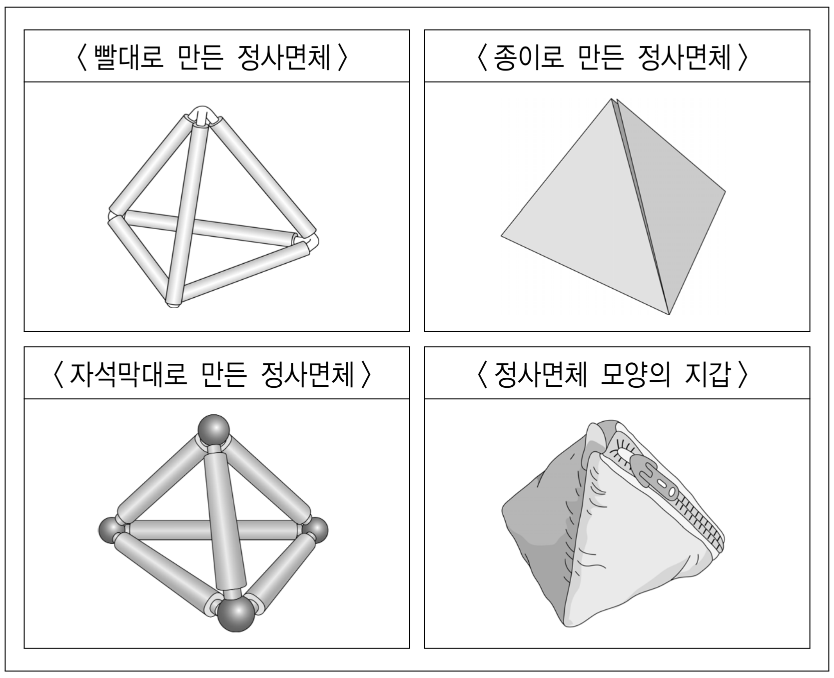
수험 번호 : (   )   성 명 : (   )

제1차 시험	2 교시 전공A	14문항 40점	시험 시간 90분

◦ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
◦ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

기입형 【1 ~ 10】

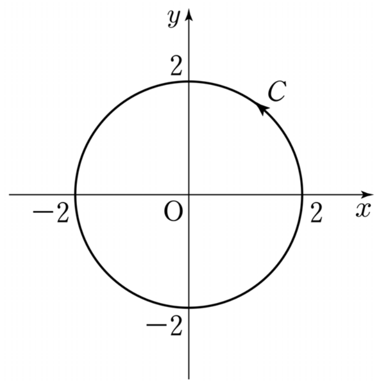
1. 중학교 기하 수업에서 다음과 같은 자료를 이용하여 정사면체에 대해 학습하였다.



위 자료들은 서로 다르게 보이지만, 구조적으로는 같은 구체물이다. 딘즈(Z. Dienes)의 수학 학습 이론에서 볼 때, 이러한 다양한 형태의 구체물을 활용한 수업은 어떤 원리를 적용한 것인지 쓰시오. [2점]

2. 다음 그림과 같이 반시계 방향의 단순닫힌곡선(simple closed curve) $C: x^2+y^2=4$가 주어졌을 때,

$\int_C \left(e^{\sin x}-4x^2y\right)dx+\left(e^{\cos y}+4xy^2\right)dy$의 값을 구하시오. [2점]



3. 매개변수방정식 $x=4t-t^2,\ y=t^2+1\ (0\le t\le 1)$로 주어진 곡선 $y=f(x)$가 있다. 이 곡선 위의 두 점 $(0,\ f(0))$, $(3,\ f(3))$을 연결하는 직선의 기울기와 곡선 위의 점 $(c,\ f(c))$에서의 접선의 기울기가 같게 되는 값 c를 구간 $(0,\ 3)$에서 구하시오. [2점]

4. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 원점과 점 (1, 2, 3)을 지나는 직선을 회전축으로 하여 180° 회전이동하는 변환을 T라 하자. 벡터 $(x,\ y,\ z)$에 대하여 $T(x,\ y,\ z) = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$가 되는 행렬 A의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)을 구하시오. [2점]

5. 모집단 A는 어떤 지역의 20세 남자들로 이루어져 있다. 모집단 A에 속하는 남자의 키는 평균 175 cm, 표준편차 5 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 모집단 A에서 임의로 뽑은 남자의 키(cm)와 몸무게(kg)를 각각 확률변수 X, Y라 할 때, $Y = \frac{2}{5}X + \alpha$가 성립한다고 하자. 여기서, α는 평균 0, 표준편차 $2\sqrt{3}$인 정규분포를 따르는 확률변수이고, X와 α는 독립이다. 확률 $\mathrm{P}(Y > 72) = \mathrm{P}(Z > k)$일 때, k의 값을 구하시오. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [2점]

6. 두 연속확률변수 X와 Y는 독립이고, X와 Y의 확률밀도함수(probability density function)를 각각 $f_X(x) = 2x\ (0 < x < 1)$, $f_Y(y) = 1\ (0 < y < 1)$이라고 하자. $M = \left[\frac{X}{Y}\right]$라 할 때, 확률 $\mathrm{P}(M = 2)$를 구하시오. (단, $[a]$는 a보다 크지 않은 최대정수이다.) [2점]

7. 좌표공간 $\mathbb{R}^3$에서 두 곡선 $\alpha(t) = (2t,\ t^2,\ at^3)$, $\beta(t) = (t,\ bt,\ t^2)$이 합동이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. [2점]

8. 덧셈군 $G=\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{6}$에서 $(5,\ 5)\in G$로 생성된 부분군을 H라 하자. 잉여군(quotient group, factor group) G/H에서 원소 $(3,\ 3)+H$의 위수(order)를 구하시오. [2점]

9. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에 다음 조건 ①, ②에 의해 정의되는 부분집합족(family of subsets) $\mathcal{B}$를 기저로 하는 위상 $\mathfrak{I}$가 주어졌다고 하자.

① 모든 정수 m에 대하여, $\{m\}\in\mathcal{B}$이다. ② 모든 정수 n과 음이 아닌 모든 정수 k에 대하여, $(n,\ n+2^{-k})\in\mathcal{B}$이다.

위상공간 $(\mathbb{R},\ \mathfrak{I})$에서 집합 $A=\left\{\frac{1}{2}\right\}$의 도집합(derived set) A'을 구하시오. [2점]

10. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$에 대하여, 집합 $X=\{(m,\ n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid m\geq 12$ 또는 $n\geq 6\}$에 다음과 같이 위상 $\mathfrak{I}$가 주어졌다고 하자.

$$\mathfrak{I}=\{G\subseteq X\mid X-G\text{는 유한집합}\}\cup\{\varnothing\}$$

함수 $f: X\to\mathbb{N}$을 $f(m,\ n)=m+n$으로 정의하고, $\mathbb{N}$의 위상을 $\mathfrak{I}_{\mathbb{N}}=\{U\subseteq\mathbb{N}\mid f^{-1}(U)\in\mathfrak{I}\}$라 하자. 위상공간 $(\mathbb{N},\ \mathfrak{I}_{\mathbb{N}})$의 연결성분(connected component)의 개수를 구하시오. [2점]

서술형 【1 ~ 4】

1. 다음은 박 교수가 수학 교육론 강의 시간에 라카토스(I. Lakatos)의 준경험주의를 주제로 진행한 강의의 일부이다.

> 박 교수 : 하나의 추측을 제기하고, 그 추측을 부분추측으로 분해하는 1가지 사례를 말해 봅시다.
>
> 민 태 : 교수님, 제가 말해 보겠습니다. 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 두 실근을 가진다는 추측을 제기하고, 다음과 같이 세 단계로 분해하여 보았습니다.
>
> > 1단계 : 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 포물선이고, 실근의 개수는 그래프가 x축과 만나는 점의 개수와 같습니다.
> >
> > 2단계 : 그래프의 꼭짓점 $(p,\ q)$는 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$인데, a의 부호를 기준으로 생각하면, $a>0$일 때 $p<0$, $q<0$이고, $a<0$일 때 $p>0$, $q>0$입니다.
> >
> > 3단계 : 포물선의 모양을 생각하면, $a>0$일 때 꼭짓점이 제3사분면, $a<0$일 때 꼭짓점이 제1사분면에 있으므로 그래프가 x축과 만나는 점은 2개입니다.
>
> 박 교수 : 민태가 제기한 추측을 통해 라카토스의 준경험주의 관점에서 수업을 진행해 봅시다.
>
> 혜 수 : 교수님, ㉠ 방정식 $x^2-4x+4=0$은 근이 $x=2$이고, 하나의 실근만을 가집니다.
>
> 학 생 들 : 맞아요. 민태의 처음 추측이 틀렸어요.
>
> 현 덕 : 저는 다르게 생각합니다. ㉡ 어떤 추측이 항상 참이 된다고는 생각하지 않습니다. 그러나 지금 이 경우에는 혜수가 말한 것을 예외로 인정하면 민태의 추측을 옹호할 수 있습니다.
>
> 박 교수 : 어디 한번 봅시다. 만약 혜수의 말이 옳다면, 민태의 부분추측은 어디가 잘못되었을까요?
>
> 혜 수 : 2단계가 잘못된 것 같습니다. $a>0$일 때 b의 값을 함께 고려해 보겠습니다. 만약 $b=0$이면 $p<0$이 아니라 $p=-\dfrac{b}{2a}=0$이 됩니다.
>
> 박 교수 : 그렇군요. 그러면 부분추측을 수정해야겠군요. 2단계와 3단계를 합쳐서 수정해 봅시다. 그리고 처음의 추측도 수정해야겠군요.
>
> 은 영 : 교수님, 1단계도 이상한데요? 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 항상 포물선인가요?
>
> 혜 수 : 아닌 것 같습니다.
>
> … (중략) …
>
> 민 태 : 교수님, 지금까지의 논의를 통해 볼 때 다음과 같이 정리할 수 있습니다. $a\neq 0$인 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 $b^2-4ac>0$일 때, 두 실근을 갖습니다.

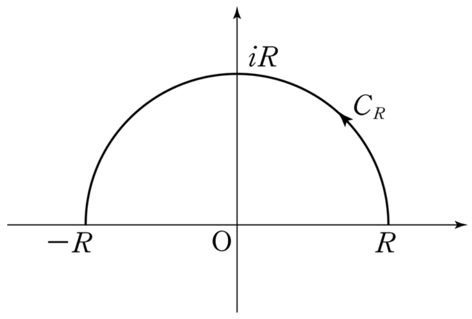
위 상황에서 ㉡의 관점에서 ㉠과 같은 반례가 출현할 때, 이 반례에 대한 라카토스의 대응 방법을 무엇이라고 부르는지 적고, 이러한 대응 방법으로 인해 발생할 수 있는 현상에 대해 쓰시오. 또, 위 강의 내용을 참고하여 라카토스의 준경험주의 관점에서 수학적 지식의 성장 과정을 설명하시오. [5점]

2. 다음은 김 교사가 정 교사의 수업을 참관한 후, 김 교사가 작성한 수업참관일지와 정 교사가 작성한 수업소감문의 일부이다.

> (가) 김 교사의 **수업참관일지**
>
> 정 교사는 도입 단계에서 다음과 같은 사실을 제시하여 학생의 학습 동기를 유발하고자 하였다.
>
> $$1+3+5+7=16=4^2$$
>
> 이로부터, "연속한 홀수의 합은 어떤 수의 제곱이 될까?"라고 발문을 하면서,
>
> $$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\boxed{}^2$$
>
> 이라는 탐구과제를 학생들에게 제시하였다. 학생들은 이 탐구과제를 수행하는 과정에서 아래와 같은 특수한 몇몇 사례를 조사하였다.
>
> $$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1+3 &= 4 = 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 = 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2 \end{aligned}$$
>
> 학생들은 구체적인 사례에 대한 관찰로부터 새로운 추측 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$을 발견하였다. 이러한 발견 이후, ㉠ 정 교사는 수학적 귀납법을 이용하여 탐구과제에 대한 수업을 계속 진행하였다.
>
> … (후략) …
>
> (나) 정 교사의 **수업소감문**
>
> 학생들은 자신들이 관찰한 구체적인 사례로부터 공통점에 주목하여 새로운 추측을 잘 이끌어 내었다. 하지만, 조금 아쉬운 점은 ㉡ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$이 성립함을 보여 주는 시각적 모형(visual model)을 학생들에게 제공해 주지 못했다는 것이다.

위의 **수업참관일지**를 통해 볼 때, 정 교사의 수업에서 학생들이 사용했을 추론 유형을 적고, 이 추론 유형의 특성에 근거하여 ㉠의 이유를 설명하시오. 또, **수업소감문**에 제시된 ㉡에 해당하는 구체적인 예를 하나 제시하시오. [5점]

3. 복소평면 $\mathbb{C}$에서 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 R인 반원을 $C_R = \{Re^{it} \in \mathbb{C} \mid 0 \le t \le \pi\}$라고 할 때, $a > 0$과 $b > 0$에 대하여 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{z\,e^{ibz}}{z^2+a^2}dz = 0$임을 보이고 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,e^{ibx}}{x^2+a^2}dx$의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점]



4. 다음 삼차 합동방정식에 대하여 $\mathbb{Z}_{2015}$에 속하는 해의 개수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [5점]

$$x^3 - 8 \equiv 0 \pmod{2015} \quad (\text{참고: } 2015 = 5 \times 13 \times 31)$$

<수고하셨습니다.>