2012학년도 중등교사신규임용후보자선정경쟁시험

수 학

1차 시험	2 교시 (전공)	40문항 80점	시험 시간 120 분

◦ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
◦ 문항의 배점이 1.5점과 2.5점인 문항에는 배점이 표시되어 있습니다. 나머지 문항은 2점입니다.
◦ 각 문항의 정답을 컴퓨터용 흑색 사인펜을 사용하여 답안지에 표시하시오.

1. 19세기 말에 일어난 수학교육 근대화 운동에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점]

<보 기>

ㄱ. 독일에서는 과학이 장려되면서 학교교육에서 사회생활에 필요한 응용수학을 더 많이 다루어야 한다는 주장이 설득력을 얻어 수학교육을 개선하려는 시도가 이루어졌다. 이런 관점에서 클라인(F. Klein)은 교사들과 함께 메란(Meran) 교육과정이라는 김나지움(Gymnasium)의 수학 교수요목을 작성하였다.

ㄴ. 영국에서는 산업혁명으로 등장한 노동자 계급에 대한 교육이 요구되면서 학교수학에서 순수수학을 강조해야 할 필요성이 높아졌다. 이런 관점에서 페리(J. Perry)는 대수 공식을 이용하는 지식과 능력을 길러야 한다고 주장하였다.

ㄷ. 미국에서는 산업이 급격히 발전하면서 상공업적 실리, 실익을 추구하는 데 직접적인 도움이 되는 교육이 중시되었다. 이런 사회 분위기에서 무어(E. Moore)는 학교수학의 내용과 방법이 보다 풍부해져야 한다고 주장하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

2. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 방식에 따라 기하를 지도할 때, 학생들의 국소적 조직화에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 반 힐레(P. van Hiele)가 제시한 기하 학습 수준에서 도형을 그 성질에 기초하여 인식하는 분석적 수준에 해당하는 활동이다.

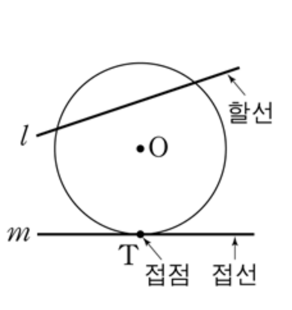
ㄴ. 학습자가 자신의 실제로부터 시작하여 기하 지식 체계를 조직하는 활동이다.

ㄷ. 수학자가 이론을 정립할 때 행하는 활동으로서 유클리드(Euclid)『원론』의 조직화 방식과 동일하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

3. 접선에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

오른쪽 그림과 같이 한 직선 l이 원 O와 두 점에서 만날 때, 직선 l을 원 O의 할선이라고 한다. 또한 직선 m이 원 O와 한 점 T에서 만날 때, 직선 m을 원 O의 접선, 점 T를 접점이라고 한다. 이때 직선 m이 원 O에 접한다고 한다.



① 2007년 개정 교육과정에 따르면 위의 설명은 중학교 1학년 <수학>에서 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 접선을 정의하는 방식이다.
② 위의 설명은 이차함수의 그래프의 접선을 정의하는 데 적용할 수 있다.
③ $y=|x|$의 그래프는 위에 제시된 접선의 정의를 개선하기 위한 반례로 활용할 수 있다.
④ 2007년 개정 교육과정에 따르면 고등학교 1학년 <수학>에서는 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구할 때 판별식을 활용한다.
⑤ 2007년 개정 교육과정에 따르면 <미적분과 통계 기본>에서 접선은 미분가능성 및 미분계수의 기하학적 의미를 설명하면서 할선의 극한으로 다룬다.

4. A 학생이 연립방정식의 활용 문제를 다음과 같이 해결하였다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

> 문제
>
> 두 자연수의 합이 65이고 큰 수는 작은 수의 3배보다 5가 크다고 할 때, 두 자연수를 구하여라.
>
> A 학생의 풀이 과정
>
> 1단계) 큰 수를 x, 작은 수를 y로 놓는다.
>
> 2단계) x, y를 사용하여 문제의 뜻에 따라 연립방정식을 세우면 다음과 같다.
>
> $$\begin{cases} x+y=65 \\ x=3y+5 \end{cases}$$
>
> 3단계) 이 연립방정식을 풀면 $x=50$, $y=15$이다.
>
> 4단계) 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인해 보면
> $50+15=65$, $50=3\times15+5$
> 이므로 문제의 뜻에 맞는다.

<보 기>

ㄱ. 1단계는 문제에 주어진 조건과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 폴리아(G. Polya)가 말한 문제해결 계획을 수립하는 단계에 해당한다.

ㄴ. 숀펠드(A. Schoenfeld)가 언급한 문제해결 성공 요인 중 통제(control)는 위의 모든 단계에 적용될 수 있다.

ㄷ. 4단계는 찾은 답이 문제의 조건에 합당한지 확인하는 단계로 폴리아가 말한 반성 단계에 해당한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 수 개념에는 다양한 측면이 있으므로 수 개념 지도에도 다양한 관점과 방법이 존재한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

① 프로이덴탈(H. Freudenthal)에 따르면 음수를 방정식의 근으로 정의하고 형식불역의 원리를 적용하여 음수의 연산을 지도해야 한다.

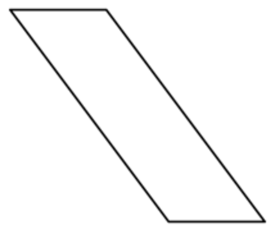
② 수직선 모델에서 음수를 표현하기 위한 음의 부호는 상황에 따라 왼쪽 방향이나 반대 방향을 뜻하므로 다중적인 의미를 갖는다.

③ 듀이(J. Dewey)에 따르면 고정 단위를 이용한 측정 활동을 하는 동안에 학생들이 분석과 종합의 과정을 경험하도록 수 개념을 지도해야 한다.

④ 피아제(J. Piaget)는 수 개념 지도에서 포함 관계에 의한 집합의 분류 활동과 서열화 활동에 대한 반영적 추상화를 강조한다.

⑤ 1960년대 미국에서 일어난 새수학 운동(New Math Movement)에서는 집합론의 기수(cardinal number) 개념을 강조하였다.

6. 어떤 교사 모임에서 문제해결의 심리학적 배경이 된 형태(게슈탈트) 심리학에 대해 연구하고 토론하였다. 논의 주제는 베르트하이머(M. Wertheimer)의 생산적 사고(productive thinking)에 관한 것으로 다음과 같다.

> 논의 주제
>
> 베르트하이머는 수업 시간에 학생들에게 오른쪽과 같은 평행사변형을 제시하고 이 도형의 넓이를 구하게 하였더니, 학생들은 도형의 밑변과 수직이 되게 선을 긋지 못하였다. 결과적으로 학생들은 평행사변형의 넓이를 올바르게 구하지 못하였다.
>
> 

위의 논의 주제와 관련한 교사들의 대화 중 옳지 않은 것은?

① 김 교사 : 평행사변형을 직사각형으로 변형하면 (밑변)×(높이) 공식을 적용할 수 있는데, 학생들이 평행사변형과 직사각형의 관련성을 이해하지 못했습니다.

② 이 교사 : 베르트하이머의 생산적 사고는 공식의 맹목적인 적용이나 시행착오를 의미하는 것이 아닙니다.

③ 박 교사 : 학생들이 평행사변형의 넓이를 구하는 데 어려움을 겪은 것은 평행사변형의 넓이를 구하는 방법에 관한 구조적 이해, 즉 '통찰'이 결여되었기 때문입니다.

④ 정 교사 : 베르트하이머는 생산적인 사고 과정을 분리, 분류, 조직화 등의 사고 조작을 통해 문제의 '내적인 구조적 관련성'을 파악해 가는 것으로 간주하였습니다.

⑤ 강 교사 : 베르트하이머는 전체에 대한 부분의 구조적 기능을 파악하여, 부분의 구조적 특성에 합치되는 방향으로 전체의 재구조화가 일어남을 강조하였습니다.

7. 미적분의 역사적 발달과 관련한 설명 중 옳지 않은 것은? [1.5점]

① 고대 그리스 시대에는 극한 개념이 없었기 때문에, 아르키메데스(Archimedes)는 실진법(착출법, method of exhaustion)으로 포물선과 할선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하였다.
② 갈릴레이(G. Galilei)는 낙하하는 물체가 움직인 거리는 그 물체의 속도를 나타내는 직선과 시간 축 사이에 생기는 삼각형의 넓이라고 보는 관점을 제시하였다.
③ 카발리에리(B. Cavalieri)의 불가분량법(method of indivisibles)에서 평면도형의 불가분량은 현이고, 입체도형의 불가분량은 단면이다.
④ 뉴턴(I. Newton)이 미분의 아이디어를 설명할 때 아주 작은 양 o을 사용한 것에 대해 버클리(G. Berkeley)는 o을 엄밀하지 않게 이중적으로 사용했다고 비판하였다.
⑤ 라이프니츠(G. Leibniz)는 물체의 운동과 그 변화를 나타내기 위해 역학적 관점에서 미분의 아이디어를 생각하였다.

8. 반 힐레(P. van Hiele)는 학생들의 사고 발달 및 학습 수준의 상승이 교사의 지도 과정에서 다음과 같은 단계들을 거쳐 이루어진다고 하였다. 이 단계들을 옳은 순서로 나열한 것은?

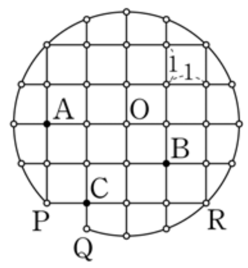
(가) 학생은 교사가 제공한 자료로 교사의 안내 하에 학습 주제를 탐구하면서 해당 분야의 구조를 점진적으로 파악하게 된다.
(나) 학생은 예전의 경험과 교사의 도움말을 토대로 탐구 분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며 관계 체계를 형성하기 시작한다.
(다) 학생은 교사가 제공한 자료를 토대로 교사와의 충분한 논의를 통해 탐구 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 학습 주제를 파악하게 된다.
(라) 학생은 자신의 학습을 재검토하여 그동안 배운 새로운 개념에 대한 탐구 활동을 개관하며 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다.
(마) 학생은 보다 복잡한 과제 해결에 도전하여 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 된다.

① (가) → (나) → (다) → (마) → (라)
② (나) → (다) → (가) → (라) → (마)
③ (나) → (다) → (가) → (마) → (라)
④ (다) → (가) → (나) → (마) → (라)
⑤ (다) → (나) → (가) → (라) → (마)

9. 최 교사는 기하 영역에서 실생활과 관련된 문제를 학생들에게 제시하고 학생들이 문제를 해결하는 동안 아래와 같은 발문을 하였다.

문제

그림은 어느 도시의 도로망을 나타낸 것으로, 정사각형 모양을 이루는 간선 도로는 교차로 간의 거리가 모두 1로 일정하고, 도시의 순환 도로는 O를 중심으로 하는 원의 일부로 되어 있다. A, B, C 대리점을 소유하고 있는 한 유통 회사에서 순환 도로 위의 P, Q, R 중 한 곳에 물품 창고를 세우려고 한다. 이때 물품 창고에서 도로를 따라 A, B, C 대리점에 이르는 거리의 합이 최소인 곳이 가장 적당하다고 하면, 어디에 세우는 것이 가장 좋겠는가?



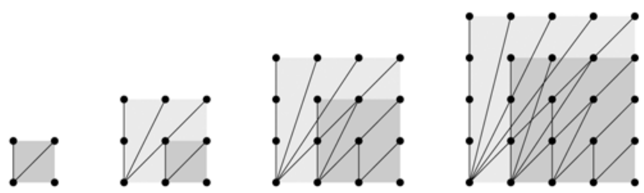
교사 발문

(가) 그림의 O가 원점이 되도록 도로망을 좌표평면 위에서 생각해 보아라.
(나) A, B, C는 각각 좌표평면의 어느 점과 대응되는가?
(다) P에서부터 A, B, C까지의 거리의 합을 구해 보아라.
(라) 위의 (다) 과정을 Q, R에 대해서도 적용해 보아라.

최 교사의 발문과 관련하여 다음 중 옳은 것은? [2.5점]

① (가)와 (나)는 원리나 공식 등의 내용을 이해하는 데 도움을 주는 반면, (다)와 (라)는 그 내용과 관련된 문제를 익숙하게 연습시키는 데 적절하다.
② (가)와 (나)는 이 문제의 풀이 방법이 떠오르지 않을 때 관련된 유사한 문제를 먼저 풀어 보게 하는 것으로, 이는 문제를 수월하게 해결하는 수단이 된다.
③ (가), (나), (다)는 문제해결을 위한 계획 단계에, (라)는 검토 단계에 제시하는 것이 적절하다.
④ (다), (라)와 같은 발문은 자칫하면 학생들이 스스로 탐구하거나 시행착오를 거쳐 학습할 수 있는 환경을 방해할 수 있다.
⑤ 위와 같은 발문은 전반적으로 학생들의 개인화와 배경화를 강조하기보다는 형식화된 수학 지식을 전달하기 위함이다.

10. 김 교사는 수업 시간에 학생들에게 한 변의 길이가 5인 기하판, 즉 5×5 기하판에 못을 연결하여 서로 다른 길이의 선분을 최대한 몇 개나 만들 수 있는지 찾아보게 하였다. 그 결과, A 학생은 풀이 과정을 다음과 같이 제시하고 20으로 답하였으나, 실제로 정답은 19이다.

> A 학생의 풀이 과정
>
> 5×5 기하판 위에 1×1 정사각형부터 시작하여 4×4 정사각형에 이르기까지 서로 다른 길이의 선분의 수를 모두 구해 보았다. 그 결과, 다음과 같은 규칙을 얻었다.
>
> (서로 다른 길이의 선분의 수)
> $=$ (이전 정사각형에서 구한 선분의 수) $+$ (새로 만든 선분의 수)
>
> 
>
>
> | 정사각형의 크기 | 서로 다른 길이의 선분의 수 |
> |---|---|
> | 1×1 | $2=2$ |
> | 2×2 | $(2)+3=5$ |
> | 3×3 | $(2+3)+4=9$ |
> | 4×4 | $(2+3+4)+5=14$ |
>
> 이 규칙을 5×5 정사각형에 적용한 결과, 서로 다른 길이의 선분의 수는 $(2+3+4+5)+6=20$(개)이다.

A 학생이 해결한 방법과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. A 학생이 5×5 정사각형에 자신이 발견한 규칙을 적용한 것은 선입견이나 부주의 등으로 인하여 관찰해야 할 사례를 간과하고 조급하게 일반화한 것이다.

ㄴ. A 학생은 일부 사례로부터 일반적 결론을 이끌어 내기 위하여 수학적 귀납법을 사용하였다.

ㄷ. A 학생은 1×1 정사각형부터 4×4 정사각형까지 서로 다른 길이의 선분의 수를 구한 방식을 형식불역의 원리에 의해 5×5 정사각형에 적용하였다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 다음은 중학교 수업에서 유리수와 순환소수의 관계를 지도하는 상황의 일부이다.

> 교사: 지난 시간에 여러분은 순환소수를 배웠어요. 오늘은 유리수와 순환소수의 관계를 배워 봅시다. 순환소수의 예를 한 가지만 들어 볼까요?
>
> 학생: $0.99999\cdots$가 있습니다.
>
> 교사: 좋아요. 순환소수 $0.99999\cdots$에서는 9가 무한히 반복되는데, 그렇다면 $0.99999\cdots$는 1과 같을까요?
>
> 학생: 1에 아주 가까이 가기는 하지만 1은 아닐 것 같습니다.
>
> 교사: 그럼 $0.99999\cdots$를 분수로 고쳐서 1과 같은지 알아봅시다.
>
> $x=0.99999\cdots$ …… ①
>
> 라고 놓읍시다. ①의 양변에 10을 곱하면
>
> $10x=9.99999\cdots$ …… ②
>
> 이고, ②에서 ①을 변끼리 빼면
>
> $9x=9$
>
> 이므로 $x=\dfrac{9}{9}=1$입니다.

위의 수업 상황과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점]

<보 기>

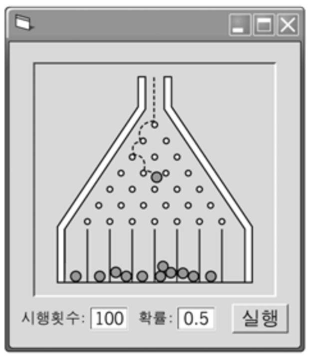
ㄱ. 학생의 순환소수에 대한 생각에는 가능적 무한(잠재적 무한, potential infinity) 개념이 반영되어 있다.

ㄴ. APOS(Action Process Object Schema) 이론에 의하면 교사가 지도하는 극한 개념은 학생의 극한 개념이 '내면화' 된 수준에 해당한다.

ㄷ. 교사가 $0.99999\cdots=1$임을 보이는 과정은 무한급수가 수렴하지 않는 경우에 적용하였을 경우 모순된 결과를 가져올 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 다음은 모의실험 프로그램을 활용한 수업이다.



교사: 오늘 수업에서는 컴퓨터로 모의실험을 해 볼 거예요. 위쪽에서 공을 떨어뜨리면 판 위에 규칙적으로 박혀 있는 못에 공이 부딪혀 바닥에 있는 빈칸 가운데 하나로 들어가게 되요. 100개의 공을 하나씩 떨어뜨렸을 때 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수는 어떻게 분포될지 한번 예상해 보세요.

학생: 각 칸에 들어가는 공의 개수가 비슷할 것 같습니다.

교사: 그럼 이 프로그램으로 실험을 해 볼까요?
(모의실험 프로그램을 실행한다.)

교사: 자, 어떤 결과가 나왔나요?

학생: 각 칸에 들어간 공의 개수가 비슷하지 않습니다.

교사: 왜 그럴까요?

학생: 아무래도 가운데 칸으로 떨어지기가 쉬울 테니까 공이 양 끝에 있는 칸으로 떨어질 가능성이 가운데 칸으로 떨어질 가능성보다 낮을 것 같습니다.

교사: 그렇지요. 지금 여러분은 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수가 따르는 분포가 근사적으로 정규분포를 이룬다는 것을 알아냈어요.

위의 수업 상황과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 위의 수업에서는 조르단 효과(주르뎅 효과, Jourdain effect)가 발생하였다.
ㄴ. 위의 모의실험 프로그램은 중심극한정리(central limit theorem)를 학습할 수 있는 환경을 제공한다.
ㄷ. 위의 모의실험 프로그램은 이 수업에서 학생들의 학습을 안내하는 교사의 역할을 대신하였다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 다음 문항과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

문항

다음은 세 명의 야구 선수 A, B, C가 최근 5경기에서 기록한 안타 수이다. 경기 당 안타 수가 가장 고른 선수는 누구이겠는가? 그 이유를 설명하여라.

A : 1, 3, 3, 1, 2
B : 0, 4, 0, 4, 2
C : 1, 3, 0, 4, 2

<보 기>

ㄱ. 현재 수학 학습의 평가에서는 2007년 개정 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수해야 하므로, 이 문항은 중학교 2학년에서 다뤄질 수 있다.
ㄴ. 이 문항은 분산, 표준편차 등의 수학 용어를 사용하여 수학적으로 표현해 봄으로써 의사소통 능력을 기르는 데 도움이 될 수 있다.
ㄷ. 이 문항은 해결 결과뿐만 아니라 해결 과정도 중시하고 있다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

14. 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$의 서로 다른 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5로 생성되는 벡터공간

$$V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 벡터공간 V와 $\mathbb{R}^n$이 동형(isomorphic)이 되는 자연수 n이 존재한다.

ㄴ. 집합 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$가 V의 기저(basis)인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.

ㄷ. $\dim V = 2$인 벡터 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 실수체 $\mathbb{R}$ 위에서 정의된 벡터공간

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

와 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 선형사상 $L : V \to V$를

$$L(B) = AB - BA$$

로 정의하자. V의 부분공간(subspace)

$$\mathrm{im}(L) = \{ L(B) \mid B \in V \}$$

의 차원은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

16. 정수 x_0과 27은 서로소이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$x_n \equiv 16 x_{n-1} \pmod{27}, \; 0 < x_n < 27$$

이 성립할 때, $x_n \equiv x_0 \pmod{27}$이 되는 최소의 자연수 n의 값은? (단, 2는 법 27에 관한 원시근(primitive root)이다.)

① 4 ② 9 ③ 13 ④ 18 ⑤ 26

17. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 연립합동식 $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{28} \\ x \equiv 6 \pmod{36} \end{cases}$의 정수해가 존재한다.

ㄴ. 홀수인 소수 p에 대하여 합동식 $x^4 \equiv -1 \pmod{p}$의 정수해가 존재하면 $p \equiv 1 \pmod{8}$이다.

ㄷ. 부정방정식 $x^2 + 2x + 5 - 65y^2 = 2011$의 정수해가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점]

<보 기>

ㄱ. 무한순환군(infinite cyclic group) G는 덧셈군 $\mathbb{Z}$와 서로 동형(isomorphic)이다.

ㄴ. 두 덧셈군 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{15}$와 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}$은 서로 동형이다.

ㄷ. 위수(order)가 360인 순환군의 생성원(generator)은 모두 96개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 체 $\mathbb{Z}_3$ 위의 행렬에 대하여 연산이 행렬의 곱셈인 군

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}_3,\ ac \neq 0 \right\}$$

이 있다. 군 G에서 곱셈군 $\mathbb{Z}_3^* = \mathbb{Z}_3 - \{0\}$으로의 군준동형사상(group homomorphism)

$$\phi : G \to \mathbb{Z}_3^*,\quad \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = ac$$

의 핵(kernel) $\ker(\phi)$와 동형인 군은? (단, S_3은 3차의 대칭군(symmetric group)이고, A_4는 4차의 교대군(alternating group)이다.) [2.5점]

① $\mathbb{Z}_3$ ② S_3 ③ $\mathbb{Z}_6$ ④ $\mathbb{Z}_9$ ⑤ A_4

20. 복소수체의 부분환 $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\mathbb{Z}[i]$는 주아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.

ㄴ. $\mathbb{Z}[i]$의 단원(unit)은 모두 6개이다.

ㄷ. $\mathbb{Z}[i]$의 주아이디얼(principal ideal) $\langle 2 \rangle$는 극대아이디얼(maximal ideal)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

21. 체 $\mathbb{Z}_2$의 유한확대체(finite extension field) F가 $[F : \mathbb{Z}_2] = 6$을 만족시키고, $\alpha \in F$에 대하여 함수

$$\varphi_\alpha : \mathbb{Z}_2[x] \to F,\quad \varphi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$$

는 대입준동형사상(evaluation homomorphism)이다. 옳지 않은 것은?

① 체 F는 위수(order)가 64인 유한체이다.
② φ_α의 핵 $\ker(\varphi_\alpha)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$의 주아이디얼(principal ideal)이다.
③ α의 기약다항식 $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Z}_2)$는 $\mathbb{Z}_2[x]$에서 다항식 $x^{64} - x$를 나눈다.
④ 기약다항식 $\mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Z}_2)$의 차수(degree)가 4인 $\alpha \in F$가 존재한다.
⑤ φ_α의 상 $\mathrm{im}(\varphi_\alpha)$는 F의 부분체(subfield)이다.

22. 멱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-3)^n$ 을 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는?

[1.5점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

23. 양의 실수 t에 대하여 함수 f를

$$f(t) = \int_0^{\sqrt{t}} \int_y^{\sqrt{t}} \frac{1}{2+\sin(x^2)}\, dx\, dy$$

로 정의할 때, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

24. 연속함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$와 실수열 $\{x_n\}$에 대하여 옳지 않은 것은?

[2.5점]

① 닫힌구간 $[0,1]$에서 f는 균등연속(평등연속, 고른연속, uniformly continuous)이다.

② 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3$이 수렴하면 수열 $\{f(x_n)\}$은 코시수열(Cauchy sequence)이다.

③ f가 단조증가이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$이 수렴하면 $\{x_n\}$은 수렴한다.

④ f가 미분가능하고 f의 도함수가 유계이면 f는 균등연속이다.

⑤ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ 도 수렴한다.

25. 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능한 함수 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. f의 도함수 f'은 연속이다.

ㄴ. 모든 $x\in(0,1)$에 대하여 $f'(x)<0$이면 f의 역함수 $f^{-1}:D\to(0,1)$이 존재한다. (단, D는 f의 치역이다.)

ㄷ. f의 역함수 $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,1)$이 존재하면 f^{-1}는 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 균등수렴(평등수렴, 고른수렴, uniform convergence)하고, 열린구간 $(0,1)$에서 균등연속함수열 $\{g_n\}$은 함수 g로 균등수렴한다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. f는 $[0,1]$에서 적분가능하다.
ㄴ. f와 g의 곱 fg는 $(0,1)$에서 연속이다.
ㄷ. g는 $(0,1)$에서 균등연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 특이적분(이상적분, improper integral) $\int_0^1 \ln x\, dx$가 수렴한다.
ㄴ. 닫힌구간 $[0,1]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & x\in[0,1]-\mathbb{Q}\end{cases}$$

는 $[0,1]$에서 리만(Riemann)적분가능하다.
ㄷ. $[0,1]$에서 적분가능한 함수 f에 대하여

$$F(x)=\int_0^x f(y)\,dy$$

로 정의된 함수 F는 열린구간 $(0,1)$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 복소평면에서 $C=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=5\}$가 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선일 때,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\cos z}{\sin z}dz$$

의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

29. 복소평면에서 영역 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$에 대하여 연속함수 $f:D\to\mathbb{C}$가 해석적(analytic, holomorphic)이기 위한 필요충분조건을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. D에서 $f(z)$로 수렴하는 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$이 존재한다.
ㄴ. D에 포함되는 모든 단순닫힌경로(단순폐곡선, simple closed contour) C에 대하여 $\int_C f(z)dz=0$이다.
ㄷ. D에서 $\frac{dF}{dz}=f$를 만족하는 해석함수 F가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$의 멱집합(power set) $P(\mathbb{R})$에 대하여 $X = P(\mathbb{R}) - \{\varnothing\}$이라 하자. 집합 X에서의 관계(relation) $\sim$을

$$A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing \quad (A, B \in X)$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점]

<보 기>

ㄱ. 관계 $\sim$은 반사적(reflexive)이다.
ㄴ. 관계 $\sim$은 대칭적(symmetric)이다.
ㄷ. 관계 $\sim$은 추이적(transitive)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

31. 위상공간 X에서 부분집합 A의 내부(interior)와 폐포(closure)를 각각 $\mathrm{int}(A)$, $\overline{A}$로 나타낼 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{int}(X-A) = X - \overline{A}$
ㄴ. $\overline{\mathrm{int}(\overline{A})} = \overline{A}$
ㄷ. $X - \overline{A \cap B} = (X - \overline{A}) \cup (X - \overline{B})$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

32. 실수 전체의 집합 $\mathbb{R}$에서 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

로 정의하자. $\mathbb{R}$ 위의 보통위상(usual topology) $\mathfrak{I}$에 대하여

$$\{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}\}$$

로 정의된 $\mathbb{R}$ 위의 위상을 $\mathfrak{I}_0$이라 하자. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에 대하여 옳지 않은 것은? (단, $\mathbb{Q}$는 유리수 전체의 집합이다.) [2.5점]

① $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 $\sqrt{2}$는 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$의 내점(interior point)이다.
② $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 $\mathbb{Q}$의 경계(boundary)는 $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{0\}$이다.
③ 구간 $(-1, 1)$에 대하여 $(-1, 1) \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 열린집합(open set)이다.
④ 구간 $[-1, 1]$에 대하여 $[-1, 1] \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$는 $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 닫힌집합(closed set)이다.
⑤ $(\mathbb{R}, \mathfrak{I}_0)$에서 0은 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$의 집적점(극한점, accumulation point, cluster point, limit point)이다.

33. $\mathbb{R}^2$ 위의 점 $q = (0, 1)$과 집합 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$에 대하여 $X = A \cup \{q\}$라 하자. X 위의 위상 $\mathfrak{I}$를

$$\mathfrak{I} = P(A) \cup \{U \subseteq X \mid q \in U,\ A - U \text{가 유한집합}\}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $P(A) = \{U \mid U \subseteq A\}$이다.)

<보 기>

ㄱ. $(X, \mathfrak{I})$는 콤팩트공간(compact space)이다.
ㄴ. $(X, \mathfrak{I})$는 정규공간(normal space)이다.
ㄷ. $(X, \mathfrak{I})$는 분리가능공간(가분공간, separable space)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에 놓여 있는 정규곡선(정칙곡선, regular curve) C에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. C 위의 모든 점에서 곡률(curvature)이 0이면 C는 직선이거나 직선의 일부이다.
ㄴ. C 위의 모든 점에서 열률(비틀림률, 꼬임률, torsion)이 정의되고 그 값이 0이면 C는 적당한 평면에 놓여 있다.
ㄷ. C 위의 모든 점에서 곡률이 양의 상수로 일정하면 C는 원이거나 원의 일부이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 2차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^2$에서 3차원 공간 $\mathbb{R}^3$ 상의 매끄러운 곡면(smooth surface) S 위로의 등장사상(등거리사상, isometry) $f:\mathbb{R}^2 \to S$가 존재할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. f의 역사상 f^{-1}도 등장사상이다.
ㄴ. S의 모든 점에서 가우스 곡률(Gaussian curvature)이 0이다.
ㄷ. S의 모든 점에서 평균곡률(mean curvature)이 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36. 상자 A에 빨간 공 2개와 흰 공 3개가 들어 있고, 상자 B에 빨간 공 2개와 흰 공 m개가 들어 있다. 상자 A가 선택될 확률이 $\frac{1}{3}$이고 상자 B가 선택될 확률이 $\frac{2}{3}$이다. 두 상자 A, B 중 하나를 선택하여 그 상자에서 임의로 추출한 한 개의 공이 흰 공일 때, 이 흰 공이 상자 A에서 추출되었을 조건부 확률이 $\frac{2}{7}$이다. m의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

37. 두 이산형 확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수(joint probability mass function) $f(x,y)=P(X=x,\ Y=y)$를

$$f(x,y)=\frac{3x-y}{12},\ x=1,2,\ y=1,2$$

라 하자. $Y=1$일 때, X의 조건부 기댓값(조건부 평균) $E(X|Y=1)$의 값은?

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{13}{9}$ ④ $\frac{12}{7}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

38. 정규분포 $N(\mu_1, 36)$과 $N(\mu_2, 64)$를 각각 따르는 두 모집단 X, Y가 서로 독립이라 하자. 모집단 X에서 추출된 크기가 n인 확률표본의 표본평균을 $\overline{X}$, 모집단 Y에서 추출된 크기가 n인 확률표본의 표본평균을 $\overline{Y}$ 라 하자. 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$에 대한 95% 신뢰구간의 길이가 4.9일 때, n의 값은?
(단, $Z \sim N(0, 1)$일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$이다.)

① 36　② 49　③ 64　④ 81　⑤ 100

39. 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 다음 규칙

> (가) 1, 2, 3은 각각 홀수 번 사용한다.
> (나) 4와 5의 사용 횟수는 각각 음이 아닌 정수이다.

에 따라 일렬로 나열하여 8자리 자연수를 만들려고 할 때, 만들 수 있는 서로 다른 자연수의 개수는?

① $\frac{1}{8}(5^8 - 3^9 - 6)$　② $\frac{1}{8}(5^8 - 3^9 + 2)$
③ $\frac{1}{8}(5^8 - 3^9 + 10)$　④ $\frac{1}{8}(5^8 - 3^9 + 18)$
⑤ $\frac{1}{8}(5^8 - 3^9 + 26)$

40. 꼭짓점을 공유하지 않는 두 그래프, 회로(cycle) C_5와 완전이분그래프(complete bipartite graph) $K_{3,3}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 그래프를 G라 하자.

> (가) $V(G) = V(C_5) \cup V(K_{3,3})$
> (나) $E(G) = E(C_5) \cup E(K_{3,3}) \cup \{xy \mid x \in V(C_5), y \in V(K_{3,3})\}$

그래프 G의 모든 꼭짓점(vertex)의 차수(degree)의 합이 m, 그래프 G의 채색수(chromatic number)가 n일 때, $m+n$의 값은?
(단, 그래프 H에 대하여 $V(H)$는 H의 꼭짓점의 집합, $E(H)$는 H의 변(edge)의 집합이고, xy는 두 꼭짓점 x와 y가 양 끝점(endpoints)인 변이다.)

C_5　　$K_{3,3}$

① 90　② 91　③ 92　④ 93　⑤ 94

- 수 고 하 셨 습 니 다 -