2014학년도 중등학교교사임용후보자선정경쟁시험

수 학

수험 번호 : (   )   성 명 : (   )

1차 시험	3 교시 전공B	5문항 30점	시험 시간 90분

○ 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○ 모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

서술형 【1 ~ 3】

1. 다음은 폴리아(G. Polya)의 수학적 문제해결 교육론에 근거해 어떤 문제를 해결한 과정의 일부이다.

> <이해 단계>
> 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 파악하면서 문제를 분석한다. 구하려는 것을 x로 놓는다.
>
> <계획 단계>
> 문제에서 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 파악하고, 그러한 관계를 나타내는 방정식을 세운다. 이때 방정식이 참이라고 하자.
>
> $$\sqrt{2x-6} = 3-x$$
>
> <실행 단계>
> 양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-8x+15=0$이고, $(x-3)(x-5)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=5$이다. 그런데 이 조건은 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다.
>
> <반성 단계>
> $x=3$ 또는 $x=5$가 주어진 방정식을 참이 되게 하는 충분조건도 되는지 알아본다. $x=3$은 충분조건이지만 $x=5$는 충분조건이 아니다. 따라서 $x=3$이 주어진 방정식을 참이 되게 하는 필요충분조건이다.
> $x=3$이 문제의 상황에 부합하는지의 여부를 점검한다.

위 문제해결 과정에서는 수학적 발견술인 분석법이 사용되고 있다. <계획 단계>와 <실행 단계>에서 분석법이 어떻게 사용되고 있는지 각각 설명하시오. [3점]

2. 다항식 x^6+3의 유리수체 $\mathbb{Q}$ 위에서의 분해체(splitting field)를 K라 하면 갈루아군 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수(order)는 6임을 증명하시오. [4점]

3. 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에 대하여, 집합 $X=\mathbb{N}\cup\{-1,-2,-3\}$ 위에

$\wp(\mathbb{N})\cup\{\mathbb{N}\cup\{-1\}-F \mid F$는 $\mathbb{N}$의 유한부분집합$\}\cup\{\{-2,-3\}\}$

을 기저(base)로 하는 위상을 $\mathfrak{I}$라 하자.

> ① $\mathbb{N}\subsetneq A\subsetneq X$, $A\neq\mathbb{N}\cup\{-1\}$이고 $(A,\mathfrak{I}_A)$가 콤팩트(compact)이다.
> ② $\mathbb{N}\subsetneq B\subsetneq X$이고 $(B,\mathfrak{I}_B)$가 콤팩트가 아니다.

①을 만족하는 A를 모두 구하고, ②를 만족하는 B의 예를 하나 제시하고 예가 되는 이유를 설명하시오. (단, $\wp(\mathbb{N})=\{G \mid G\subseteq\mathbb{N}\}$이고, $Y\subset X$일 때 $\mathfrak{I}_Y=\{G\cap Y \mid G\in\mathfrak{I}\}$이다.) [3점]

논술형 【1 ~ 2】

1. 다음은 중학교에서 확률 개념을 도입하는 수업의 일부이다. 이 수업 이전에, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 따라 '가능성'은 초등학교 5-6 학년군에서 다루어졌고 '상대도수', '사건', '경우의 수'는 중학교에서 이미 다루어졌다고 하자.

김 교사 : 오늘은 가능성의 크기를 어떻게 구하는지에 대해 공부하려고 해요. 이와 관련해 일어날 가능성이 가장 큰 사건을 찾는 활동을 해 봅시다. 예를 들어 두 주사위를 던졌을 때, 두 주사위의 눈의 합이 나올 수 있는 사건의 수는 11입니다. 합이 2인 사건부터 12인 사건까지 나올 수 있는 것이지요. 그 11가지 사건 중에서 일어날 가능성이 가장 큰 사건은 무엇일까요?

학 생 들 : 11가지 사건이 일어날 가능성은 서로 같을 것 같은데요.

김 교사 : 왜 그렇게 생각하나요?

학 생 들 : 그냥 서로 같을 것 같아요.

김 교사 : 그러면 두 주사위를 던지는 실험을 통해 여러분의 예상이 맞을지에 대해 알아보도록 하지요.

12개의 모둠을 편성해서 모둠마다 두 주사위를 30번씩 던지고, 던진 횟수에 대해 각 사건이 나온 횟수를 기입하는 방식으로 상대도수를 나타낸 아래의 표를 완성하였다.

	두 주사위의 눈의 합										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30회 상대도수	$\frac{(1)}{30}$	$\frac{(2)}{30}$	$\frac{(2)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(4)}{30}$	$\frac{(5)}{30}$	$\frac{(5)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(1)}{30}$	$\frac{(1)}{30}$
60회 상대도수	$\frac{(2)}{60}$	$\frac{(3)}{60}$	$\frac{(5)}{60}$	$\frac{(5)}{60}$	$\frac{(9)}{60}$	$\frac{(11)}{60}$	$\frac{(9)}{60}$	$\frac{(6)}{60}$	$\frac{(6)}{60}$	$\frac{(3)}{60}$	$\frac{(1)}{60}$
360회 상대도수	$\frac{(9)}{360}$	$\frac{(21)}{360}$	$\frac{(32)}{360}$	$\frac{(38)}{360}$	$\frac{(51)}{360}$	$\frac{(59)}{360}$	$\frac{(50)}{360}$	$\frac{(39)}{360}$	$\frac{(31)}{360}$	$\frac{(19)}{360}$	$\frac{(11)}{360}$

김 교사 : 우리가 예상한 것과 상당히 다른 결과가 나온 이유가 뭘까요? 왜 그런지 생각해 봅시다.

학생 A : 제 생각에는 11가지 사건이 일어날 가능성이 원래부터 서로 같지 않아서 그런 것 같아요. 각 사건에 들어있는 경우의 수를 잘 세어야 해요.

김 교사 : 그 가능성이 어떻게 서로 다른지에 대해 자세히 설명해줄 수 있나요?

학생 A : 네. 두 주사위의 눈의 합이 나오는 사건의 수는 11이 맞습니다. 하지만 두 주사위의 눈이 나오는 경우의 수는 (1,1), (1,2), (1,3), ⋯, (5,6), (6,1), ⋯, (6,6)과 같이 36입니다.

이후, 학생 A는 두 주사위의 눈의 합이 2인 사건부터 12인 사건 각각에 포함된 경우들을 언급하면서, 전체 경우의 수에 대한 해당 사건에 포함된 경우의 수를 세어서 11가지 각 사건이 일어날 가능성이 $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{1}{36}$임을 설명하였다.

김 교사 : 실험 결과에서 합이 2인 사건부터 12인 사건까지의 상대도수가 서로 비슷하지 않은 이유가 무엇인지 알겠어요?

학 생 들 : 네. 알 것 같아요. 원래 가능성이 서로 달랐기 때문에 실험 결과에서도 서로 다르게 나온 것 같아요.

학생 B : 그러고 보니까, 학생 A가 제시한 각각의 가능성이 실험을 통해 나온 각각의 상대도수와 거의 같아요.

김 교사 : 좋은 관찰입니다. ⋯ (중략) ⋯ 어떤 사건이 일어날 가능성을 확률이라 합니다. 이제 우리가 오늘 했던 활동을 바탕으로 일반적으로 확률을 어떻게 구하면 될지 생각해 볼까요?

학생 A : 어떤 사건이 일어날 확률을 구할 때에는 그 사건에 들어있는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누면 구할 수 있어요.

학 생 들 : ㉠ 선생님, 다른 상황에서도 어떤 사건이 일어날 확률을 구할 때 각각의 경우는 항상 같은 가능성을 가지고 있다고 생각하면 되는 거지요?

김 교사 : ㉡ 지금 질문한 내용이 중요합니다. 여러분이 확률을 구해야 하는 상황에서 흔히 잘못 생각하는 부분이 있어요. 정육면체 주사위와 직육면체 주사위를 던진다고 생각해 봅시다. ⋯ (중략) ⋯ 실험도 해 볼까요. ⋯ (중략) ⋯ 이런 점을 잘 고려해서, 어떤 사건이 일어날 확률은 어떻게 구하면 되고 이때 무엇에 유의해야 하는지 정리해 볼까요. ⋯ (하략) ⋯

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 확률과 통계 영역 <교수 · 학습상의 유의점> 2가지 사항과 확률 직관에 대한 피시바인(E. Fischbein)의 이론을 적용하여, 김 교사는 '경우의 수의 비율'로 확률 개념을 도입하고 있다.

김 교사의 수업에서 확률과 통계 영역의 <교수 · 학습상의 유의점> 2가지 사항이 각각 어떻게 적용되고 있는지 설명하시오. 그리고 학생이 확률을 배우기 이전부터 가지고 있던 '확률 직관의 특성'과 '확률 직관 발달의 특성'에 대한 피시바인의 이론을 각각 설명하고, 위의 밑줄 친 ㉠과 ㉡에서 그러한 피시바인의 이론이 어떻게 적용되고 있는지 각각 설명하시오. [10점]

2. 다음 4개의 복소함수

$$f_1(z)=z,\quad f_2(z)=\bar{z},\quad f_3(z)=e^z,\quad f_4(z)=e^{\bar{z}}$$

로 생성되는 복소 벡터 공간

$$\{a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4f_4 \mid a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\in\mathbb{C}\}$$

를 V라 하자. 여기서 $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.
복소평면 $\mathbb{C}$ 상의 시계반대방향의 단위원 $C:|z|=1$에 대하여 사상(map) $T:V\to\mathbb{C}$를 다음과 같이 정의하자.

$$T(f)=\int_C f(z)\,dz$$

T가 선형사상임을 증명하시오. 선형사상 T의 핵(kernel) $\ker(T)$의 기저를 구하고, $\ker(T)$를 이용하여 $T^{-1}(2)=\{f\in V \mid T(f)=2\}$를 나타내시오. [10점]

<수고하셨습니다.>